

Artículo Invitado

ESTUDIO MECÁNICO DEL VOLTEO DE CAMPANAS

Salvador Ivorra *

Resumen

El volteo de campanas es un problema clásico dentro del estudio de la dinámica estructural en la bibliografía centroeuropea. Para realizar este trabajo se han clasificado en tres grandes grupos las formas de hacer sonar las campanas que impliquen la oscilación de éstas: Sistema centroeuropeo, inglés y español. Cada grupo presenta características singulares relativas a la frecuencia de giro, desequilibrio y ángulo de oscilación. Como consecuencia del movimiento oscilatorio aparecen unas fuerzas horizontales y verticales variables con el tiempo sobre los soportes de las campanas, éstas fuerzas son diferentes en cada sistema. Se han analizado los tres sistemas y se han comparado los valores máximos de las fuerzas horizontales y verticales que aparecen sobre su estructura portante.

Descriptor: Péndulo físico, Fuerzas dinámicas, Equilibrio, Campanas, Sistema mecánico.

Abstract

The swinging of bells on belfries is a classical problem in structural dynamics and has been addressed in the Central European specialized bibliography. To carry out our study, the different modalities of swinging bells have been classified in “systems” according to their most relevant characteristics in three groups: Central European, English and Spanish systems. Each group presents some singular characteristics of frequency and oscillation, unbalance and/or turning rate, which give rise to different forces variable in time on their supporting structures. We have analyzed the three systems and, compared the maximum values of the horizontal and vertical forces that appear on the structure.

Keywords: Compound pendulum, Dynamic Forces, Equilibrium, Bells, Mechanical system

Recibido en Agosto de 2004

* Dirección del autor. Tel: 034 96 387 70 07 ext. 76742; fax: 034 96 387 96 79. sivorra@mes.upv.es

* Departamento de Mecánica de los Medios Continuos y Teoría de Estructuras. Universidad Politécnica de Valencia. Camino de Vera, s/n. C.P. 46022 – Valencia, España

1. Introducción

El conocimiento de las fuerzas variables con el tiempo, introducidas por el movimiento de las campanas es un dato de especial relevancia en el diseño, proyecto o restauración de un campanario. Dependiendo de la velocidad angular y del desequilibrio, estas fuerzas pueden tener considerables interacciones dinámicas con la estructura portante, generalmente una torre campanario

Los sistemas más extendidos para hacer sonar campanas que impliquen la oscilación de éstas son el centroeuropeo, el inglés y el español, que se presentan en las figuras 1, 2 y 3 respectivamente. En el primero de ellos las campanas oscilan un determinado ángulo respecto de su posición de equilibrio, no llegando nunca a alcanzar los 180° respecto de la posición inicial con la boca de la campana hacia abajo. En el sistema inglés las campanas voltean completamente alrededor del eje de giro si bien cada oscilación se realiza en un sentido. Tanto en el sistema inglés como en el centroeuropeo las campanas se encuentran muy desequilibradas y se instalan en estructuras diseñadas al efecto en el interior de las torres. Las campanas instaladas según el sistema español voltean de forma continua en el mismo sentido alrededor de su eje de giro, se encuentran mucho más equilibradas que el resto de sistemas debido al yugo del cual están dotadas –Fig. 3- y usualmente se instalan directamente sobre los muros de l torre en ventanas diseñadas al efecto.



Fig. 1. Sistema centroeuropeo



Fig. 2. Sistema inglés



Fig. 3. Sistema español

El sistema inglés, llamado también *sistema Ambrosiano* en Italia (Beconcini, 2001) se emplea en Inglaterra (donde existen más de 5000 torres), Irlanda, Estados Unidos, Canadá, Nueva Zelanda, Sudáfrica y el Norte de Italia (con alrededor de 200 a 300 torres). El sistema centroeuropeo, denominado en Italia “*alla Romana*” se emplea en Centroeuropea, Francia, Italia, Estados Unidos, Canadá y en algunos países latinoamericanos. El sistema español se utiliza en España, Sur de Francia, Estados Unidos y también en algunos países latinoamericanos.

La Tabla 1 muestra los ángulos usuales de oscilación en diferentes países, este valor es importante a la hora de determinar las fuerzas verticales y horizontales generadas por el volteo de campanas y su interacción dinámica sobre la estructura portante

Tabla 1: Ángulos de oscilación usuales en diferentes países

Sistema	País	Ángulo de oscilación*
Centroeuropo	Alemania	54-80°
	Otros países europeos	80-110°
	EEUU	50-160°
Español	Todos los países	Círculo completo
Inglés	Todos los países	Círculo completo

*Ángulo respecto de la vertical con la boca de la campana hacia abajo

En las instalaciones modernas el movimiento de la campana se genera a través de un motor que se une a ésta a través de un mecanismo formado por una rueda, un piñón y una cadena; dependiendo del sistema adoptado el motor aplica el par correspondiente en un sentido u otro con el fin de garantizar el movimiento periódico respecto de la posición inicial, que en muchos casos es con la boca de la campana hacia arriba.

2. Estudio dinámico del movimiento de la campana

Diversos autores han estudiado los sistemas centroeuropeo e inglés. El trabajo de Heyman & Therefall (1976) es un clásico de entre ellos. Este trabajo establece la metodología para determinar la inercia y la posición del centro de gravedad de una campana instalada según los requisitos del sistema inglés. Los profesores de la universidad de Durham Wilson y Selby (1993, 1997) han estudiado numerosas torres inglesas sometidas a la acción dinámica originada por el volteo de campanas. El sistema centroeuropeo ha sido también estudiado en profundidad e incluso normalizado (DIN 4178 siendo los últimos trabajos publicados que hacen referencia a este sistema los realizados por Niederwanger (1997) y Schutz (1994). Respecto del sistema español no se dispone de referencias .

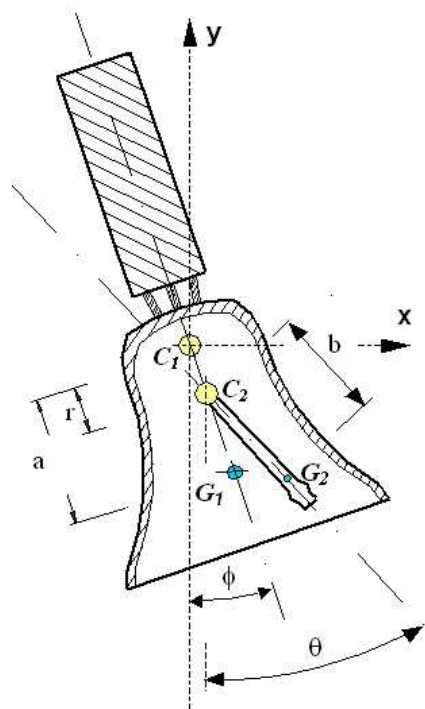


Fig. 4.- Modelo simplificado de una campana

La figura 4 presenta la sección de una campana volteando. En el interior de ella se puede observar el badajo pivotando alrededor de un eje desplazado respecto del eje de la campana una distancia r . Suponiendo la masa de la campana y la del badajo concentrada en los puntos G_1 y G_2 respectivamente, tendremos un sistema con dos grados de libertad y por tanto dos modos de vibración. La similitud entre este sistema y el del péndulo doble es evidente, por ello la posición de los puntos G_1 y G_2 vendrá dada por:

Estudio mecánico del volteo de campanas

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = a \cdot \text{sen} \phi \\ y_1 = -a \cdot \text{cos} \phi \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x_2 = r \cdot \text{sen} \phi + b \cdot \text{sen} \theta \\ y_2 = -r \cdot \text{cos} \phi - b \cdot \text{cos} \theta \end{array} \right\} \quad (1)$$

Donde:

- G₁ Centro de gravedad de la campana
- G₂ Centro de gravedad del badajo
- C₁ Eje de rotación de la campana
- C₂ Eje de rotación del badajo
- a Posición del centro de gravedad de la campana
- b Distancia desde C₂ al centro de gravedad del badajo.
- r Distancia entre el eje de rotación de la campana y el del badajo
- θ Posición angular de la campana respecto de la vertical
- φ Posición angular del badajo respecto de la de la campana
- g Aceleración de la gravedad
- t Tiempo
- M Masa del conjunto yugo, campana y herrajes
- m Masa del badajo

Realizando un planteamiento energético del problema obtendremos la ecuación diferencial del movimiento tanto de la campana como del badajo.

La energía potencial del sistema vendrá dada por:

$$U = M \cdot g \cdot y_1 + m \cdot g \cdot y_2 = -(M \cdot g \cdot a + m \cdot g \cdot r) \cdot \text{cos} \phi - m \cdot g \cdot b \cdot \text{cos} \theta \quad (2)$$

La energía cinética vendrá dada por:

$$T = \frac{1}{2} \cdot M \cdot v_1^2 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^2 = \frac{1}{2} \cdot M \cdot (a \cdot \dot{\phi})^2 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot \left((r \cdot \dot{\phi})^2 + b^2 \cdot \dot{\theta}^2 + 2 \cdot r \cdot b \cdot \dot{\phi} \cdot \dot{\theta} \cdot \text{cos}(\phi - \theta) \right) \quad (3)$$

Aplicando la Ecuación de Lagrange pueden determinarse las ecuaciones diferenciales buscadas:

$$(4) \quad \frac{\partial L}{\partial \phi} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) = 0; \quad (5) \quad \frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = 0 \quad \text{con} \quad L = T - U$$

donde:

$$(M \cdot a^2 + m \cdot r^2) \cdot \ddot{\phi} + m \cdot r \cdot b \cdot \ddot{\theta} \cdot \text{cos}(\phi - \theta) + m \cdot r \cdot b \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \text{sin}(\phi - \theta) + (M \cdot a + m \cdot r) \cdot g \cdot \text{sin} \phi = 0 \quad (4b)$$

$$m \cdot b^2 \cdot \ddot{\theta} - m \cdot r \cdot b \cdot \dot{\phi}^2 \cdot \text{sin}(\phi - \theta) + m \cdot r \cdot b \cdot \dot{\phi} \cdot \text{cos}(\phi - \theta) + m \cdot g \cdot b \cdot \text{sin}(\theta) = 0 \quad (5b)$$

Dado que la masa del badajo es aproximadamente 0.025 veces la masa de la campana puede despreciarse la masa de este frente a la de la campana, simplificándose las ecuaciones (4b) y (5b) del siguiente modo:

$$I_b \cdot \ddot{\phi} + M \cdot g \cdot a \cdot \sin \phi = 0 \quad (6)$$

$$I_c \cdot \ddot{\theta} - m \cdot r \cdot b \cdot \dot{\phi}^2 \cdot \sin(\phi - \theta) + m \cdot r \cdot b \cdot \ddot{\phi} \cdot \cos(\phi - \theta) + m \cdot g \cdot b \cdot \sin(\theta) = 0 \quad (7)$$

Donde $I_b = M \cdot a^2$ y $I_c = m \cdot b^2$ son los momentos de inercia polares de la campana y el badajo respectivamente. La ecuación (6) es la ecuación diferencial que gobierna el movimiento de la campana, por tanto se ha reducido el sistema a uno de un solo grado de libertad denominado habitualmente péndulo físico sometido a grandes oscilaciones no amortiguado. La solución de ecuación diferencial se realiza en términos de las funciones elípticas de Jacobi¹:

$$\phi(t) = 2 \cdot \arccos \left[\beta \cdot \text{sn} \left(\sqrt{\frac{g \cdot M \cdot a}{I_b}} \cdot t \right) \right] \quad (8)$$

sn = Función elíptica de Jacobi

β = Constante que depende de las condiciones iniciales

$$\beta = \sqrt{\frac{\left(\omega_0^2 + \frac{2 \cdot g \cdot M \cdot a}{I_b} \cdot (1 - \cos \omega_0) \right) \cdot I_b}{4 \cdot g \cdot M \cdot a}} \quad (9)$$

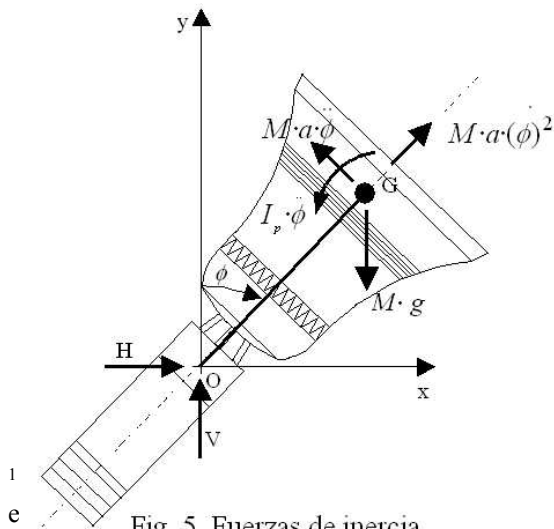


Fig. 5. Fuerzas de inercia actuantes sobre un péndulo físico

El valor de ω_0 es el valor de la velocidad angular inicial, que depende de las características de las campanas y del propio sistema de volteo utilizado. Este valor se indica en las tablas 2 a 4 para los ejemplos seleccionados.

$$\omega_0 = n \pi / t \text{ (rad/s)} \quad (10)$$

donde n = número de golpes de badajo
 t = tiempo (en s).

a a integral elíptica incompleta de primera especie que tiene una

$$\int_0^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \cdot \text{sen}^2 \theta}}, \text{ siendo } 0 < k < 1$$

a partir de esta expresión se obtendrá una relación entre el ángulo girado y el tiempo.

El volteo de campanas (ecuación 6) introduce sobre los soportes de la campana fuerzas horizontales y verticales variables con el tiempo. La figura 5 muestra el conjunto de fuerzas que aparecen sobre el péndulo físico como consecuencia de su propio movimiento así como los esfuerzos que aparecen en el eje de giro de la campana como consecuencia de estas fuerzas de inercia, lo que dará lugar a unas reacciones verticales y otras horizontales variables en función de la posición de la posición. Planteando el equilibrio tanto vertical como horizontalmente en la citada figura, se obtendrán las fuerzas que el movimiento introduce sobre los apoyos:

$$V(t) = -M \cdot g + M \cdot a \cdot \left[(\dot{\phi})^2 \cdot \cos \phi(t) + \ddot{\phi} \cdot \sin \phi(t) \right] \quad (11)$$

$$H(t) = M \cdot a \cdot \left[(\dot{\phi})^2 \cdot \sin \phi(t) - \ddot{\phi} \cdot \cos \phi(t) \right] \quad (12)$$

3. Resultados experimentales y comparación de sistemas

Con el fin de realizar el estudio comparativo de los diferentes sistemas se han escogido cinco campanas de cada uno de ellos en el rango de los 2000 a 11000 N. Los datos del sistema centroeuropeo se han obtenido de la norma DIN4178 –tabla2-. Para el sistema inglés –tabla 3- los datos se han obtenido de los trabajos de Lund (1995). Para el sistema español se han realizado ensayos –fig. 6- con más de 50 campanas situadas en la costa mediterránea, con este fin se ha desarrollado un protocolo de trabajo (Ivorra, 2002) basado en los trabajos de Herman&Therefall (1976) y Wilson (1992). La tabla 4 muestra los resultados obtenidos para el conjunto de cinco campanas seleccionadas.

Con el fin de facilitar la comparación entre un sistema u otro de volteo, los valores máximos obtenidos para las fuerzas verticales y horizontales se han dividido por el peso de cada campana, presentando valores adimensionalizados. Las diferencias quedan patentes en los resultados presentados en las tablas: Campanas de pesos similares presentan diferentes desequilibrios y diferentes velocidades de oscilación, lo cual provoca importantes diferencias en las fuerzas verticales y horizontales introducidas.

Es importante reseñar que los valores mostrados en las tablas 2, 3 y 4 para las fuerzas generadas por el volteo de campanas sobre los apoyos pueden incrementarse sustancialmente debido a la posible interacción dinámica con la frecuencia propia de la estructura, dado que las frecuencias propias de torres esbeltas se encuentran en las proximidades de las frecuencias de oscilación de las campanas lo cual puede producir un elevado factor de amplificación dinámico.

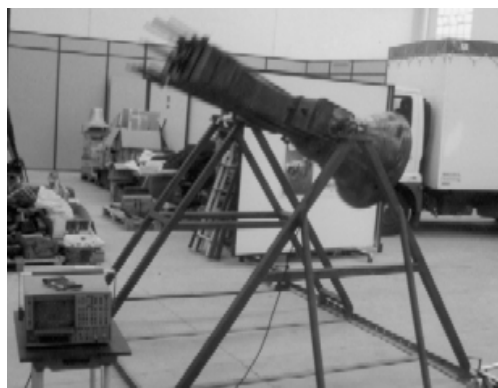


Fig. 6. Ensayos en laboratorio. Sistema español

Tabla 2: Sistema centroeuropeo

	Desequilibrio* (m)	Peso (N)	Velocidad angular (rad/s)	Ángulo de oscilación	Fuerza horizontal adimensional **	Fuerza vertical adimensional **
(1c)	0.36	2100	3.40	71°	2.23	5.77
(2c)	0.46	4300	3.14	67°	1.99	5.33
(3c)	0.52	6000	2.98	65°	1.87	5.13
(4c)	0.58	8000	2.88	63°	1.76	4.94
(5c)	0.60	10000	2.77	62°	1.69	4.83

* Distancia entre el eje de giro y la posición del centro de gravedad.

**Resultados analíticos

Tabla 3: Sistema inglés

	Desequilibrio* (m)	Peso (N)	Velocidad angular (rad/s)	Fuerza horizontal adimensional **	Fuerza vertical adimensional **
(1e)	0.33	2096	1.26	3.33	6.02
(2e)	0.49	4318	1.30	4.48	7.77
(3e)	0.31	6505	1.29	1.50	3.28
(4e)	0.27	8215	1.30	1.19	2.79
(5e)	0.42	9662	0.96	2.10	4.16

* Distancia entre el eje de giro y la posición del centro de gravedad.

**Resultados analíticos

Tabla 4: Sistema español

	Desequilibrio* (m)	Peso (N)	Velocidad angular (rad/s)	Fuerza horizontal adimensional **	Fuerza vertical adimensional **
(1s)	0.14	2000	3.97	0.38	1.46
(2s)	0.02	4300	3.14	0.03	1.04
(3s)	0.08	6270	2.82	0.12	1.14
(4s)	0.08	8260	2.61	0.09	1.10
(5s)	0.03	11020	2.20	0.03	1.03

* Distancia entre el eje de giro y la posición del centro de gravedad.

**Resultados analíticos

Estudio mecánico del volteo de campanas

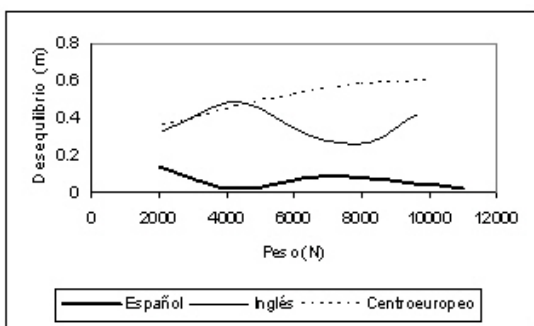


Fig. 7. Peso total vs desequilibrio

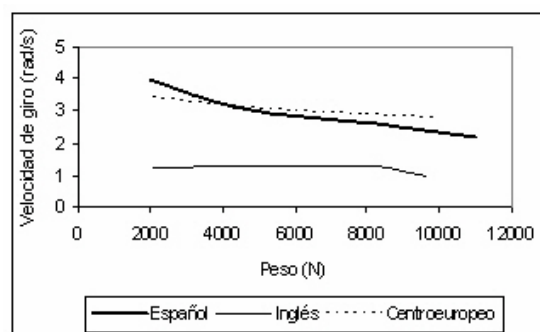


Fig. 8. Peso total vs velocidad angular

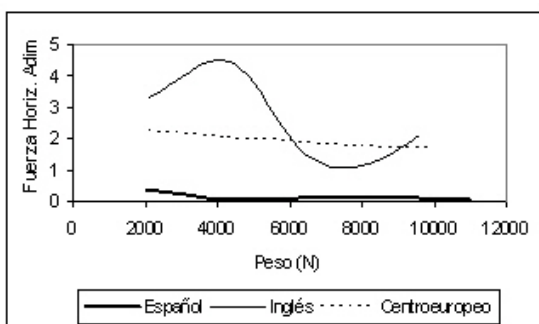


Fig. 9. Peso total vs Fuerza horizontal adimensional

La figura 7 muestra la relación existente entre el peso y el desequilibrio. Es evidente que no existe una relación marcada entre el peso de la campana y el desequilibrio que debe poseer. El sistema español está mucho más equilibrado. El sistema centroeuropo, normalizado, presenta una variación uniforme entre el peso de la campana y el desequilibrio asignado.

La figura 8 muestra la relación entre la velocidad angular escogida frente al peso de la campana, puede observarse una gran similitud entre las velocidades utilizadas en el sistema español y el centroeuropo. El sistema inglés presenta velocidades de giro inferiores a las utilizadas por los otros dos sistemas para campanas de pesos similares.

La figura 9 presenta la relación existente entre el peso de la campana y la fuerza horizontal adimensional introducida sobre los apoyos. En un campanario estas fuerzas horizontales puede originar problemas de flexión y de torsión sobre la estructura. El valor inferior ocurre para el caso español en el cual la fuerza horizontal máxima es 0.15 veces el peso del conjunto campana-yugo. Este valor se incrementa unas dos veces para el caso centroeuropo y para el sistema inglés en un rango entre las 2 y 4 veces el peso de la campana.

Los valores aquí indicados tendrán que incrementarse en el caso de existencia de interacción dinámica entre las frecuencias de oscilación de las campanas y las frecuencias propias de la torre en la que se encuentren instaladas.

5. Conclusiones

El estudio comparativo de los tres sistemas aparece resumido en las tablas 2 a 4. Puede concluirse que las fuerzas horizontales y verticales transmitidas a la estructura portante son inferiores en el sistema español, en el cual las campanas voltean de forma continuada alrededor de su eje de giro y están mucho más equilibradas.

El efecto de la amplificación dinámica debido a la interacción entre las frecuencias propias de la estructura portante y de las frecuencias de oscilación de las campanas no se han considerado en este trabajo y debe evaluarse en el estudio de cada torre en particular.

A pesar de los resultados obtenidos, no se sugiere sustituir un sistema por otro dado que el volteo de campanas además implicaciones técnicas posee también implicaciones sociológicas y antropológicas de cada comunidad que no son motivo de este estudio.

Agradecimientos

Quisiera agradecer al Dr. Francesc Llop del Gremio Valenciano de Campaneros sus reflexiones y comentarios referentes al sistema de volteo español y al profesor Dr. Julián Bravo su amable invitación a colaborar en esta publicación.

Bibliografía

- Beconcini, M., Bennati, S., Salvatore, W., 2001. Structural characterization of a medieval bell tower. First historical, experimental and numerical investigations. In: III International Seminar of Historical Constructions. Guimaraes (Portugal), 431-444
- DIN 4178: "Glockentürme: Berechnung und Ausführung"; 1978
- Heyman, J. & Therelfall B.D., 1976. Inertia Forces due to bell-Ringing, International Journal of Mechanical Science. Pergamon Press. Vol. 18, 1976, 161-164.
- Ivorra, S., Llop F., 2002. Determinación de algunas características físicas de una campana. In: Congreso de Conservación y Restauración de Bienes Culturales. Valladolid (Spain), Vol. 2, 891-900
- Lund JL, Selby AR & Wilson JM., 1995. The Dynamics of Bell Towers - a Survey in Northeast England. In: 4th Int Conf on Struct Repairs and Maintenance of Historic Buildings. Crete. Ed. Brebbia C & Leftheris B. CMP Southampton. Vol 2, 45 -52
- Niederwanger, G., 1997. Structural Repair of Damaged Old Bell Towers Based on Dynamic Measurements. In: Structural studies, Repairs and Maintenance of Historical Buildings. Ed. Sanchez. Computational Mechanical Publications. Southampton, 321-330
- Schutz, K. G., 1994, Dynamische Beanspruchung von Glockentürmen. Bauingenieur 69, Springer-Verlag, 211-217
- Selby, A. R. and Wilson J. M., 1997. Dynamic behaviour of masonry church bell towers, Worldwide Advances in Structural Concrete and Masonry. In: Proceedings of the CCMS Symposium, Chicago, ASCE, New York, 188-199.
- Wilson, J.M., Selby A., 1993. Engineering a Cathedral, London, Thomas Telford Ltd., London, 77-100